

COVER PAGE

Document downloaded by @DAEL

Sat Nov 28 12:46:38 2026
For personal use

When automatic English translation is provided, only the original document is authentic.
The EAA cannot be held responsible of any translation error

Bibliographical reference

Lineares Schallfeld in einem einen Querschnittssprung habenden geschlossenen Rohr, Kiyoshi Matsui, Acta Acustica **vol. 96** (Number 1), 2010, pp. 14-25

DOI
https://doi.org/10.3813/AAA.918251

Acta Acustica united with Acustica
Vol. 96 (2010) 14 – 25

Scientific Papers
DOI 10.3813/AAA.918251

Lineares Schallfeld in einem einen Querschnittssprung habenden geschlossenen Rohr

Kiyoshi Matsui
Chair of Fluid Dynamics (Hermann-Föttinger-Institut), Technische Universität Berlin, Müller-Breslau-Straße 8, 10623 Berlin, Germany. kiyoshi.matsui@campus.tu-berlin.de

Linear Acoustic Field in a Closed Pipe with an Abrupt Change in Cross-Sectional Area

Culick and Yang studied an acoustic field in a closed pipe with an abrupt change in cross-sectional area [vol. 143, Progress in Astronautics and Aeronautics, 1992, p. 759]. They presented only fundamental results; here the field is fully analyzed. The boundary conditions at the area discontinuity are equality of acoustic pressures and that of acoustic mass fluxes. For nonzero, finite S_1/S_2 (S_1, the cross-sectional area of one part of the pipe; S_2, that of the other part), the characteristic wave number multiplied by the total pipe length (simply, the wave number) of the m-th mode lies in $((m-1/2)\pi, (m+1/2)\pi)$; for zero S_1/S_2, it lies in $[(m-1/2)\pi, (m+1/2)\pi]$ and can analytically be calculated. If the discontinuity is located at $2n/2m$ ($n = 1, \ldots, m-1$) or $(2n-1)/2m$ ($n = 1, \ldots, m$) of the pipe length, the wave number equals $m\pi$ for all S_1/S_2. In the former configurations, the field is identical with that in a straight pipe. In the latter, the ratio of the pressure amplitude in one part of the pipe to that in the other depends on S_1/S_2. For zero S_1/S_2, if the discontinuity is located at $n/(2m+1)$ ($n = 1, 3, \ldots, 2m-1$) or $n/(2m-1)$ ($n = 1, 3, \ldots, 2m-3$) of the pipe length, the wave number equals $(m+1/2)\pi$ or $(m-1/2)\pi$ and coincides with that of the $(m+1)$-th or $(m-1)$-th mode, respectively; the wave numbers are degenerate.

Zusammenfassung

Kulick und Yang untersuchten ein Schallfeld in einem beiderseits geschlossenen, einen Querschnittssprung habenden Rohr [Band 143, Progress in Astronautics and Aeronautics, 1992, S. 759]. Sie legten nur fundamentale Ergebnisse vor; hier wird das Feld ausführlich analysiert. Die Randbedingungen an der Querschnittssprungstelle sind die Gleichheiten der Schalldrücke und Schallflüsse. Bei unverschwindendem, endlichem S_1/S_2 (S_1, die Querschnittsfläche des Rohrs in einem Teil; S_2, die im anderen Teil) liegt die Eigenwellenzahl (die mit der Länge des Rohrs multiplizierte charakteristische Wellenzahl) der m-ten Mode in $((m-1/2)\pi, (m+1/2)\pi)$; bei verschwindendem S_1/S_2 liegt sie in $[(m-1/2)\pi, (m+1/2)\pi]$ und kann analytisch gerechnet werden. An der Querschnittssprungstelle ist die Ortsableitung der Schallschnelle stetig, aber diejenige des Schalldrucks unstetig. Falls der Querschnittssprung bei $2n/2m$ ($n = 1, \ldots, m-1$) oder $(2n-1)/2m$ ($n = 1, \ldots, m$) der Rohrlänge liegt, beträgt die Eigenwellenzahl bei allen S_1/S_2 den Wert $m\pi$. In den ersteren Fällen ist das Wellenfeld mit demjenigen im Rohr ohne Querschnittssprung identisch. In den letzteren Fällen ändert sich das Verhältnis von der Druckamplitude in einem Teil zu derjenigen im anderen Teil mit S_1/S_2. Bei verschwindendem S_1/S_2, falls der Querschnittssprung bei $n/(2m+1)$ ($n = 1, 3, \ldots, 2m-1$) der Rohrlänge liegt, beträgt die Eigenwellenzahl $(m+1/2)\pi$ und stimmt mit derjenigen der $(m+1)$-ten Mode überein; falls der Querschnittssprung bei $n/(2m-1)$ ($n = 1, 3, \ldots, 2m-3$) liegt, beträgt die Eigenwellenzahl $(m-1/2)\pi$ und stimmt mit derjenigen der $(m-1)$-ten Mode überein. Diese Eigenwellenzahlen sind entartet.

PACS no. 43.20.Ks

1. Einleitung

Kulick und Yang untersuchten im Jahre 1992 ein Schallfeld in einem geschlossenen Rohr, in dem es einen Querschnittssprung gibt [1]. Sie setzten die Bedingungen zur Bestimmung des Felds fest und führten die Kurven charakteristischer Wellenzahlen der Grundmode für fünf Rohrformen auf. Doch gaben sie keine weiteren Ergebnisse an. Das Schallfeld wird hier ausführlich analysiert. Die gebrauchten Methoden werden auch auf die Analyse der linearen Schallfelder in demjenigen Rohr mit einem Querschnittssprung, bei dem ein Ende oder beide Enden offen sind, angewendet. Die Ergebnisse solcher Analyse werden im Anhang kurz dargestellt.

Eingegangen am 25 September 2008,
angenommen am 15 September 2009.

© S. Hirzel Verlag · EAA

2. Formulierung

Eindimensionale stehende Schallwellen befinden sich in einem beiderseits schallhart geschlossenen Rohr, dessen Querschnittsfläche sich irgendwo plötzlich ändert (Abbildung 1). Die Randbedingungen an der Querschnittssprungstelle sind [1]
(i) die Gleichheit der Schalldrücke

$$p_1 = p_2 \tag{1}$$

(p_1 ist der Schalldruck im Teil 1, p_2 der im Teil 2)
(ii) die Gleichheit der Schallflüsse

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \tag{2}$$

(v_1 ist die Schallschnelle im Teil 1, v_2 die im Teil 2). Die Randbedingungen an den beiden Rohrenden sind verschwindende Schallschnelle. Die Bedingung (2) bleibt folgerichtig, solange das Feld annähernd eindimensional ist, und sie ist zur Bestimmung des akustischen Felds im Rohr mit einem Querschnittssprung angewendet worden [2, 3]. Bemerke doch, dass diese Bedingung keine verschwindende Schallschnelle an der ringförmigen Endwand des dicken Teils gewährleistet.

Wegen der verschwindenden Schallschnelle an der Stelle $x = 0$ ergeben sich der Orts-Zeit-Verlauf des Schalldrucks und derjenige der Schallschnelle im Teil 1 zu

$$p_1/\gamma\overline{P} = P_1 \cos\big(kL(x/L)\big)\cos\omega t, \tag{3}$$

$$v_1/c = P_1 \sin\big(kL(x/L)\big)\sin\omega t, \tag{4}$$

unter Voraussetzung harmonischer Zeitabhängigkeit. Wegen der verschwindenden Schallschnelle an der Stelle $x = L$ ergeben sich die Verläufe im Teil 2 zu

$$p_2/\gamma\overline{P} = P_2 \cos\big(kL(1 - x/L)\big)\cos\omega t, \tag{5}$$

$$v_2/c = -P_2 \sin\big(kL(1 - x/L)\big)\sin\omega t. \tag{6}$$

Hierin bedeutet γ das Verhältnis der spezifischen Wärme, $\overline{P}$ den mittleren Druck des Gases, P_1 die dimensionslose Amplitude im Teil 1, P_2 die im Teil 2, k die Wellenzahl, c die Schallgeschwindigkeit, ω die Winkelfrequenz, und t die Zeit. In dieser Formulierung kann P_1 oder P_2, oder beide, negativ sein.

Aus der Bedingung (1) folgt mit Gleichungen (3) und (5)

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cos\big(kL(1 - L_1/L)\big)}{\cos\big(kL(L_1/L)\big)}. \tag{7}$$

Aus der Bedingung (2) folgt mit Gleichungen (4) und (6)

$$\frac{P_1}{P_2} = -\frac{S_2}{S_1}\frac{\sin\big(kL(1 - L_1/L)\big)}{\sin\big(kL(L_1/L)\big)}. \tag{8}$$

Die Gleichsetzung beider P_1/P_2 ergibt eine Grundgleichung zur Bestimmung des kL,

$$\cot\big(kL(L_1/L)\big) = -\frac{S_1}{S_2}\cot\big(kL(1 - L_1/L)\big). \tag{9}$$

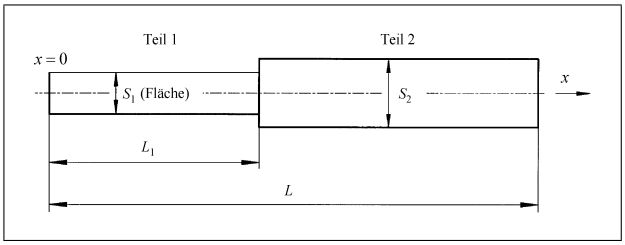

Abbildung 1. Form des Rohrs.

Diese Gleichung kann sich aus der von Kulick und Yang gegebenen, mit der komplexen Zahl ausgedrückten Grundgleichung [1] herleiten lassen. Der reziproke Ausdruck der Gleichung (9) ergibt eine alternative Grundgleichung

$$\tan\big(kL(L_1/L)\big) = -\frac{S_2}{S_1}\tan\big(kL(1 - L_1/L)\big). \tag{10}$$

Gleichung (9) wird unwirksam, falls

$$kL(L_1/L) = i\pi$$
$$\text{und zugleich} \quad kL(1 - L_1/L) = j\pi \tag{11}$$

(i und j sind natürliche Zahlen) und Gleichung (10) unwirksam, falls

$$kL(L_1/L) = (i - 1/2)\pi$$
$$\text{und zugleich} \quad kL(1 - L_1/L) = (j - 1/2)\pi. \tag{12}$$

Man sieht ein, dass Gleichungen (9) und (10) unverändert bleiben, wenn S_1/S_2 und L_1/L gegen S_2/S_1 und $1 - L_1/L$ vertauscht werden. Andererseits durch eine Koordinatentransformation $x = L - \bar{x}$ werden die rechten Seiten der Gleichungen (3) und (4) mit dem umgekehrten Index (1→2) so umgeformt, dass sie die Druck- und Schnelleverteilung im Teil 2 im $\bar{x}$-System darstellen; die rechten Seiten der Gleichungen (5) und (6) mit dem umgekehrten Index (2→1) werden so umgeformt, dass sie die Druck- und Schnelleverteilung im Teil 1 im $\bar{x}$-System darstellen (auch im $\bar{x}$-System heißt der Teil 1 die Seite auf $\bar{x} = 0$ und der Teil 2 die auf $\bar{x} = 1$). Deshalb sind die Druckverteilungen im $\bar{x}$-System mit denjenigen im x-System identisch; die Schnelleverteilungen im $\bar{x}$-System sind mit den Schnelleverteilungen im x-System mit umgekehrten Vorzeichen identisch. Das zeigt (beachte $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}\bar{x}/\mathrm{d}t$), dass das Wellenfeld für $S_1/S_2 = s$ und $L_1/L = l$ mit demjenigen für $S_1/S_2 = 1/s$ und $L_1/L = 1 - l$ identisch ist.

Praktisch kann man mit Recht L_1/L für eine rationale Zahl halten. Also kann man $L_1/L = \mathcal{L}_1/\mathcal{L}$ schreiben, wobei ein $\mathcal{L}_1/\mathcal{L}$ gekürzter Bruch ist. Der Ausdruck $\mathcal{L}_1/\mathcal{L}$ anstatt L_1/L wird nötigenfalls benutzt. In den folgenden Analysen wird angenommen, dass L_1/L weder null noch eins ist.

Eine graphische Darstellung der Funktionen (siehe Gleichung 9)

$$H_g(kL) = \cot\big(kL(L_1/L)\big) \tag{13}$$

und

$$H_d(kL) = -(S_1/S_2)\cot\left(kL(1-L_1/L)\right) \qquad (14)$$

auf derselben Koordinatenebene (Abbildung 2) gibt einen Überblick über die Verteilung der Lösungen der Gleichung (9). Die Lösung der Gleichung (9) oder (10) ist die dimensionslose charakteristische Wellenzahl, die wir die Eigenwellenzahl nennen und durch $kL|_e$ bezeichnen.

3. Analyse bei unverschwindendem, endlichem S_1/S_2

3.1. Wertbereich der m-ten Eigenwellenzahl

Man bemerkt in Abbildung 2, dass die m-te Lösung, d.h. die m-te Eigenwellenzahl, ungefähr $m\pi$ beträgt. In Wirklichkeit gilt

$$(m - 1/2)\pi < m\text{-tes}\, kL|_e < (m + 1/2)\pi, \qquad (15)$$

was in diesem Abschnitt nachgewiesen wird. Dabei ist es zweckmäßig, auf einer Gleichung zu beruhen, in der die in Gleichung (9) oder (10) enthaltenen Unstetigkeiten beseitigt sind. Infolge der grundsätzlichen Eigenschaft des Felds, dass das Feld für $S_1/S_2 = s$ und $L_1/L = l$ mit demjenigen für $S_1/S_2 = 1/s$ und $L_1/L = 1 - l$ identisch ist, genügt es uns, den Nachweis für den Fall $S_1/S_2 < 1$ zu führen; in diesem Abschnitt wird $S_1/S_2 < 1$ angenommen.

Mit $\sin\left(kL(L_1/L)\right)\ \sin\left(kL(1-L_1/L)\right)$ multipliziert, führt Gleichung (9) zu

$$(1 + S_1/S_2)\sin\left(kL\right) = (S_1/S_2 - 1)\sin\left(kL(1-2L_1/L)\right). \qquad (16)$$

Mit $\cos\left(kL(L_1/L)\right)\ \cos\left(kL(1-L_1/L)\right)$ multipliziert, führt Gleichung (10) zu

$$(1 + S_2/S_1)\sin\left(kL\right) = (1 - S_2/S_1)\sin\left(kL(1-2L_1/L)\right). \qquad (17)$$

Gleichung (17) ist mit Gleichung (16) identisch, solange S_1/S_2 unverschwindend und endlich bleibt. Das bedeutet, dass Gleichungen (9) und (10) zu derselben Gleichung führen. Gleichung (9) ist bei (11) unwirksam und Gleichung (10) bei (12). Die Beziehungen (11) und (12) gelten nicht nebeneinander; das besagt, dass Gleichungen (16) und (17) frei von Beschränkungen sind. Der Nachweis für die Beziehung (15) wird aufgrund Gleichung (16) geführt.

Man definiert

$$F_g(kL) = (1 + S_1/S_2)\sin(kL), \qquad (18)$$

$$F_d(kL) = (S_1/S_2 - 1)\sin\left(kL(1-2L_1/L)\right), \qquad (19)$$

$$\begin{aligned} f(kL) &= F_g(kL) - F_d(kL) \\ &= (1 + S_1/S_2)\sin\left(kL\right) \\ &\quad - (S_1/S_2 - 1)\sin\left(kL(1-2L_1/L)\right). \end{aligned} \qquad (20)$$

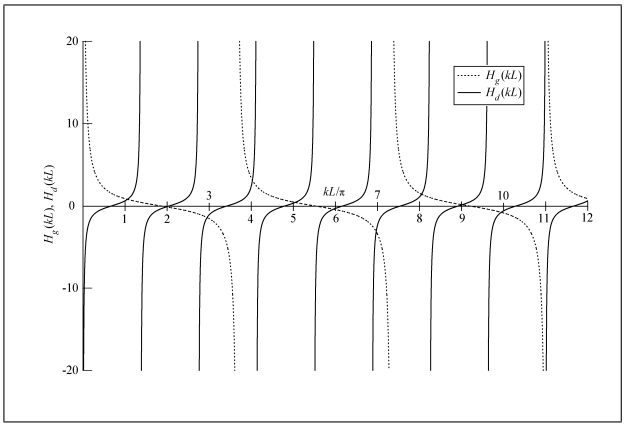

Abbildung 2. $H_g(kL)$ und $H_d(kL)$ auf derselben Koordinatenebene: $S_1/S_2 = 0.7$, $L_1/L = 0.2727$ (=3/11).

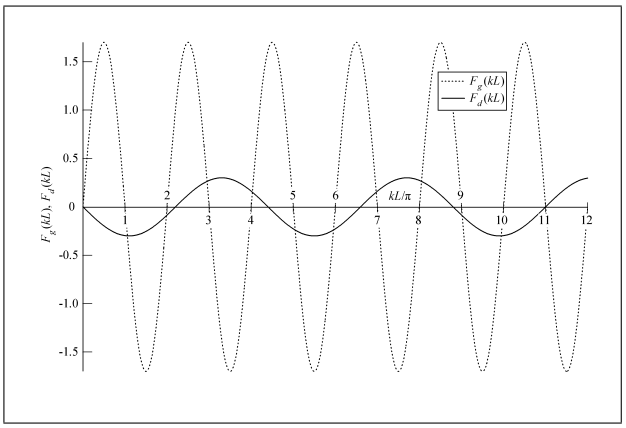

Abbildung 3. $F_g(kL)$ und $F_d(kL)$ auf derselben Koordinatenebene: $S_1/S_2 = 0.7$, $L_1/L = 0.2727$ (=3/11).

Die $F_g(kL)$-Kurve geht monoton im Intervall $((m - 1/2)\pi, (m + 1/2)\pi)$ auf- oder abwärts (Abbildung 3). Die absolute Amplitude des $F_d(kL)$ ist niedriger als die des $F_g(kL)$; die Halbperiode des $F_d(kL)$ ist größer als π. Folglich schneidet die $F_d(kL)$-Kurve im Intervall $((m - 1/2)\pi, (m + 1/2)\pi)$ unfehlbar und nur einmal die $F_g(kL)$-Kurve. Das weist graphisch die Beziehung (15) nach.

Wir weisen die Beziehung (15) analytisch nach, indem wir die Funktionswerte $f((m - 1/2)\pi)$ und $f((m + 1/2)\pi)$ prüfen. Die Sinus $\sin\left((m - 1/2)\pi\right)$ und $\sin\left((m + 1/2)\pi\right)$ nehmen unterschiedliche Werte an, je nachdem ob m gerade oder ungerade ist; deshalb ist es zweckmäßig, den Nachweis für (15) bei einem geraden m ($m = 2n$) und ungeraden m ($m = 2n - 1$) getrennt zu führen. Wir führen zuerst den Nachweis bei einem geraden m. Es ergeben sich

$$f\left((2n - 1/2)\pi\right) = -(1 + S_1/S_2) - (S_1/S_2 - 1)\sin\left((2n - 1/2)\pi(1 - 2L_1/L)\right), \qquad (21)$$

$$f\left((2n + 1/2)\pi\right) = (1 + S_1/S_2) - (S_1/S_2 - 1)\sin\left((2n + 1/2)\pi(1 - 2L_1/L)\right). \qquad (22)$$

Der Funktionswert $f\left((2n - 1/2)\pi\right)$ nimmt sein Maximum $-2S_1/S_2$ an, falls die Sinusfunktion in (21) eins beträgt. Der Funktionswert $f\left((2n + 1/2)\pi\right)$ nimmt sein Minimum

$2S_1/S_2$ an, falls die Sinusfunktion in (22) minus eins beträgt. Daraus folgen

$$f\big((2n - 1/2)\pi\big) < 0, \tag{23}$$

$$f\big((2n + 1/2)\pi\big) > 0. \tag{24}$$

Das zeigt, dass $f(kL)$ im Intervall

$$(2n - 1/2)\pi < kL < (2n + 1/2)\pi \tag{25}$$

wenigstens einmal null wird.

Nun werden die Änderungen der Ableitungen von Gleichungen (18)–(20)

$$\begin{aligned} F_g'(kL) &= (1 + S_1/S_2)\cos(kL), \\ F_d'(kL) &= (S_1/S_2 - 1)(1 - 2L_1/L) \\ &\quad \cos\big(kL(1 - 2L_1/L)\big), \\ f'(kL) &= F_g'(kL) - F_d'(kL) \\ &= (1 + S_1/S_2)\cos\big(kL\big) \\ &\quad - (S_1/S_2 - 1)(1 - 2L_1/L) \\ &\quad \cdot \cos\big(kL(1 - 2L_1/L)\big) \end{aligned}$$

im Intervall (25) untersucht. Die Ableitung $F_g'(kL)$ nimmt null bei $kL = (2n \pm 1/2)\pi$ an, hat ein Maximum bei $kL = 2n\pi$ und bleibt positiv im übrigen Intervall. Die Ableitung $F_d'(kL)$ verhält sich verschiedenartig, von L_1/L und n abhängend. Aber wegen $1 + S_1/S_2 > |(S_1/S_2 - 1)(1 - 2L_1/L)|$ und [Halbperiode des $F_d'(kL)$] $> \pi$ beschränken sich die Reihenfolgen des Vorzeichens von $f'(kL)$ im Intervall (25) auf folgende vier: (i) $(-,+,-)$ [Abbildung 4 (a)], (ii) $(-,+)$ [(b)], (iii) $(+,-)$ [(c)], (iv) $(+)$ [(d)]. Dementsprechend hat $f(kL)$ in diesem Intervall entweder (i) erst ein lokales Minimum und nächst ein lokales Maximum, oder (ii) ein lokales Minimum, oder (iii) ein lokales Maximum oder (iv) kein Extremum. Infolge der Ungleichungen (23), (24) und des oben aufgeklärten Verhaltens des $f(kL)$ gelten

$$\text{[lokales Minimum]} < f\big((2n - 1/2)\pi\big)$$

$$\text{und} \quad \text{[lokales Maximum]} > f\big((2n + 1/2)\pi\big).$$

Die Funktion $f(kL)$ ist deswegen im Intervall, das dem Bereich $[f((2n - 1/2)\pi), f((2n + 1/2)\pi)]$ entspricht, einwertig. Also wird $f(kL)$ im Intervall (25) nur einmal null. Diese beweisen die Beziehung (15) bei einem geraden m.

Weil $(2n - 1/2)\pi = ((2n - 1) + 1/2)\pi$, besagt die Ungleichung (23)

$$f\big(((2n - 1) + 1/2)\pi\big) < 0.$$

Weil $(2(n - 1) + 1/2)\pi = ((2n - 1) - 1/2)\pi$, besagt die Ungleichung (24) mit $n - 1$ anstatt n (diese Ungleichung gilt bei einem beliebigen n)

$$f\big(((2n - 1) - 1/2)\pi\big) > 0.$$

Das zeigt, dass $f(kL)$ im Intervall

$$\big((2n - 1) - 1/2\big)\pi < kL < \big((2n - 1) + 1/2\big)\pi \tag{26}$$

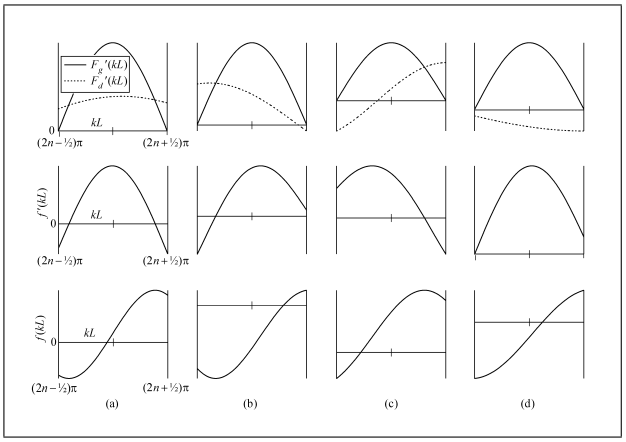

Abbildung 4. Verhalten des $F_g'(kL)$ und $F_d'(kL)$ (obere Diagramme), des $f'(kL)$ (mittlere Diagramme) und des $f(kL)$ (untere Diagramme) im Intervall $[(2n - 1/2)\pi, (2n + 1/2)\pi]$.

wenigstens einmal null wird. Untersucht man wie im letzten Absatz das Verhalten des $f(kL)$ in diesem Intervall, so erkennt man, dass $f(kL)$ im Intervall, das dem Bereich $[f(((2n-1) - 1/2)\pi), f(((2n-1) + 1/2)\pi)]$ entspricht, einwertig ist; $f(kL)$ wird im Intervall (26) nur einmal null. Diese beweisen die Beziehung (15) bei einem ungeraden m. Vergleiche die Beziehung (15) mit einem wohl bekannten Ergebnis, dass die m-te dimensionslose charakteristische Wellenzahl der in einem geschlossenen einförmigen Rohr stehenden Wellen gerade $m\pi$ ist.

3.2. Abschätzung der m-ten Eigenwellenzahl

Wir können nach einer einfachen Methode ermitteln, ob die m-te Eigenwellenzahl größer als, niedriger als, oder gleich $m\pi$ ist. Gleichung (9) wird dazu benutzt; infolgedessen muss der Fall, in dem sich die Beziehung (11) erfüllt, getrennt untersucht werden. Die Methode besteht darin, den für gegebene S_1/S_2 und L_1/L durch

$$h(m\pi) = H_g(m\pi) - H_d(m\pi) \tag{27}$$

gegebenen Wert zu prüfen. Wenn $h(m\pi)$ positiv ist, ist die m-te Eigenwellenzahl größer als $m\pi$ (Abbildung 5a); wenn negativ, niedriger als $m\pi$ (b); wenn null, gleich $m\pi$ (c). Wegen des Additionstheorems wird Gleichung (27) in

$$h(m\pi) = (1 - S_1/S_2)\cot\big((\mathcal{L}_1/\mathcal{L})m\pi\big) \tag{28}$$

umgeformt ($(\mathcal{L}_1/\mathcal{L})\pi \neq i$). Nach der Prüfung des Wertes $2m\mathcal{L}_1/\mathcal{L}$ kann man das Vorzeichen der Gleichung (28) feststellen. Wenn sich die Beziehung (11) erfüllt, ergibt sich $kL = j\mathcal{L}\pi$. Leicht erfasst man, dass solches kL die Gleichung (10) erfüllt und eine Eigenwellenzahl ist. Die Ergebnisse der Abschätzungen sind in Tabelle I zusammengefasst. Die zweite Spalte enthält die alternativen Ausdrücke der in der ersten Spalte gegebenen Kriterien. Die erste Zeile entspricht dem getrennt untersuchten Fall $kL = j\mathcal{L}\pi$. Bemerke, dass $kL|_e = m\pi$ unabhängig von S_1/S_2 vorkommt.

Bei $kL = j\mathcal{L}\pi$ kommen das Periodenende des $H_g(kL)$ und dasjenige des $H_d(kL)$ zusammen (siehe Abbildung 2

Tabelle I. Abschätzung der m-ten Eigenwellenzahl. [1)] Zu dieser Klasse gehört der Fall, in dem sich $2m\mathcal{L}_1/\mathcal{L}$ nicht auf eins beläuft. Anmerkung: Das n in der zweiten Spalte nimmt einen Wert $0, 1, \ldots, m-1$ an (Null ist für die erste Zeile ausgeschlossen).

$2m\mathcal{L}_1/\mathcal{L}$	Äquivalent der ersten Spalte	$S_1/S_2 < 1$		$S_1/S_2 > 1$	
		$h(m\pi)$	m-te E.w.	$h(m\pi)$	m-te E.w.
Gerade Zahl	$\mathcal{L}_1/\mathcal{L} = 2n/2m$	–	$= m\pi$	–	$= m\pi$
Gerade Zahl + Rest[1)]	$2n/2m < \mathcal{L}_1/\mathcal{L} < (2n+1)/2m$	>0	$> m\pi$	<0	$< m\pi$
Ungerade Zahl	$\mathcal{L}_1/\mathcal{L} = (2n+1)/2m$	=0	$= m\pi$	=0	$= m\pi$
Ungerade Zahl + Rest	$(2n+1)/2m < \mathcal{L}_1/\mathcal{L} < 2(n+1)/2m$	<0	$< m\pi$	>0	$> m\pi$

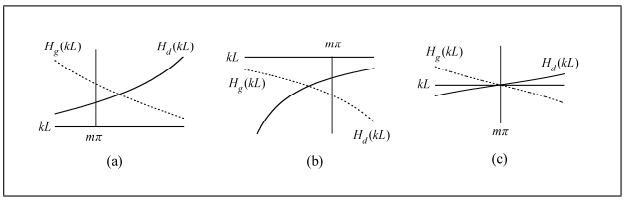

Abbildung 5. Lösung der Gleichung (9) in der Nähe von $kL = m\pi$.

bei $kL = 11\pi$); das besagt, dass sich dieselbe Aufstellung der $H_g(kL)$- und $H_d(kL)$-Kurven je $\mathcal{L}\pi$ wiederholt. Folglich, wenn ein kL eine Eigenwellenzahl ist, sind alle $kL + j\mathcal{L}\pi$ auch die Eigenwellenzahlen. Um den exakten Wert einer Eigenwellenzahl zu rechnen, muss man eine numerische Methode verwenden. Dabei man nimmt besser Gleichung (16) oder (17), nicht (9) oder (10), als die Grundgleichung auf.

4. Analyse bei verschwindendem S_1/S_2

4.1. Wertbereich der m-ten Eigenwellenzahl

Je weiter sich das Verhältnis S_1/S_2 von eins entfernt, desto unrealistischer wird die Randbedingung (2); die Untersuchung des Falls $S_1/S_2 = 0$ oder $S_2/S_1 = 0$ ist praktisch von wenig Bedeutung. Doch, weil die Untersuchung über das Verhalten einer Lösung beim Grenzübergang des sie beeinflussenden Parameters mathematisch unerlässlich ist, werden diese Fälle untersucht.

Auch bei $S_1/S_2 = 0$ oder $S_2/S_1 = 0$ existieren mathematisch bedeutungsvolle Lösungen. Wir beschränken unsere Analysen auf den Fall $S_1/S_2 = 0$, weil man die Ergebnisse bei $S_2/S_1 = 0$ aus denjenigen bei $S_1/S_2 = 0$ erhalten kann, indem man einen Wert L_1/L bei $S_1/S_2 = 0$ gegen den Wert $1 - L_1/L$ vertauscht. Mit $S_1/S_2 = 0$ führen Gleichungen (18), (19) und (20) zu

$$G_g(kL) = \sin(kL), \tag{29}$$

$$G_d(kL) = -\sin\big(kL(1-2L_1/L)\big), \tag{30}$$

$$\begin{aligned} g(kL) &= G_g(kL) - G_d(kL) \\ &= \sin\big(kL\big) + \sin\big(kL(1-2L_1/L)\big). \end{aligned} \tag{31}$$

Betrachtet man die Kurven in Abbildung 6 über dem kL-Intervall zwischen 4.5π und 9.5π, so erfasst man, dass die m-te Eigenwellenzahl, wie bei unverschwindendem, endlichem S_1/S_2, im Intervall $((m-1/2)\pi, (m+1/2)\pi)$

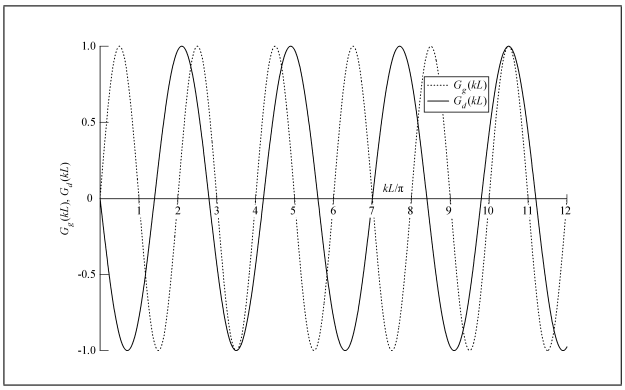

Abbildung 6. $G_g(kL)$ und $G_d(kL)$ auf derselben Koordinatenebene: $S_1/S_2 = 0$, $L_1/L = 0.1429$ (=1/7).

liegt. Doch, weil die absolute Amplitude des $G_g(kL)$ der absoluten Amplitude des $G_d(kL)$ gleich ist, können sich die $G_g(kL)$- und $G_d(kL)$-Kurve an ihrem Höchsten oder Tiefesten berühren (bei $kL = 3.5\pi$ und 10.5π in Abbildung 6). Das kL, bei dem sich die beiden Kurven berühren, ist eine Eigenwellenzahl. Die Halbperiode des $G_d(kL)$ ist größer als π; also schneidet die $G_d(kL)$-Kurve die $G_g(kL)$-Kurve nie in dem sich von einem Höchsten oder Tiefesten nach rechts oder links ausdehnenden π-Abstand. Es gibt nur eine Eigenwellenzahl in einem Intervall, das größer als 2π ist. Das heißt, die einem Höchsten oder Tiefesten entsprechende Eigenwellenzahl ist doppelt entartet (eine zweifache Lösung der Gleichung $g(kL) = 0$, siehe Abbildung 7 bei $kL = 3.5\pi$ und 10.5π). Aus diesen folgt

$$(m-1/2)\pi \le m\text{-tes } kL|_e \le (m+1/2)\pi, \tag{32}$$

worin eine entartete Eigenwellenzahl bei der Bestimmung der Ordnungszahl m doppelt gezählt werden muss (zum Beispiel, falls die dritte Eigenwellenzahl entartet ist, ist das nächste m fünf). In folgenden Absätzen wird ein analytischer Nachweis für diese Beziehung geliefert.

Wir prüfen die Funktionswerte $g((2n-1/2)\pi)$ und $g((2n+1/2)\pi)$. Es sind

$$g\big((2n-1/2)\pi\big) = -1 + \sin\big((2n-1/2)\pi(1-2L_1/L)\big), \tag{33}$$

$$g\big((2n+1/2)\pi\big) = 1 + \sin\big((2n+1/2)\pi(1-2L_1/L)\big). \tag{34}$$

Man sieht ein, dass $g((2n-1/2)\pi) = 0$, falls die Sinusfunktion in Gleichung (33) eins beträgt, und anderenfalls $g((2n-1/2)\pi) < 0$. Ebenfalls sieht man, dass $g((2n+$

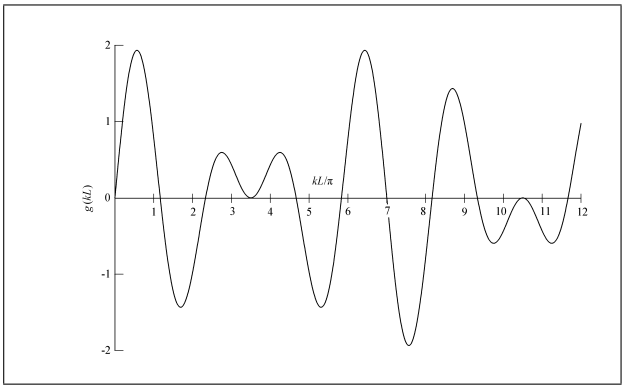

Abbildung 7. Der der Abbildung 6 entsprechende Verlauf des $g(kL)$: $S_1/S_2 = 0$, $L_1/L = 0.1429$ (=1/7).

$^1/_2)\pi) = 0$, falls die Sinusfunktion in Gleichung (34) minus eins beträgt, und anderenfalls $g((2n + {}^1/_2)\pi) > 0$.

Falls $g((2n-{}^1/_2)\pi) = 0$, ist $(2n-{}^1/_2)\pi$ Eigenwellenzahl. Zudem gelten

$$g'\big((2n - {}^1/_2)\pi\big) = 0,$$
$$g''\big((2n - {}^1/_2)\pi\big) = 1 - (1 - 2L_1/L)^2 > 0.$$

Das besagt, dass $g(kL)$ hier ein lokales Minimum hat (siehe Abbildung 7 bei $kL = 3.5\pi$).

Andererseits, weil die Halbperiode des $\sin(kL(1 - 2L_1/L))$ größer als π ist, geschieht es nie, dass die Sinusfunktion in Gleichung (33) eins annimmt und zugleich diejenige in Gleichung (34) minus eins annimmt. Das bedeutet, dass $g((2n + {}^1/_2)\pi) > 0$ und $g((2n - {}^3/_2)\pi) > 0$. Untersucht man wie im Abschnitt 3.1 das Verhalten des $g(kL)$, so erkennt man, dass $g(kL)$ im Intervall $((2n - {}^1/_2)\pi, (2n + {}^1/_2)\pi)$ ein lokales Maximum hat, das natürlich größer als $f((2n + {}^1/_2)\pi)$ ist. Folglich wird $g(kL)$ im Intervall $((2n-{}^1/_2)\pi, (2n+{}^1/_2)\pi]$ nie null. Desgleichen wird $g(kL)$ im Intervall $[(2n - {}^3/_2)\pi, (2n - {}^1/_2)\pi)$ nie null. Das $(2n - {}^1/_2)\pi$ ist eine einzige, entartete Eigenwellenzahl im Intervall $[(2n - {}^3/_2)\pi, (2n + {}^1/_2)\pi]$.

Falls $g((2n - {}^1/_2)\pi) < 0$, wird der Funktionswert $g((2n + {}^1/_2)\pi)$ geprüft. Wenn $g((2n + {}^1/_2)\pi) > 0$, wird $g(kL)$ im Intervall $((2n-{}^1/_2)\pi, (2n+{}^1/_2)\pi)$ unfehlbar und nur einmal null, weil $g(kL)$ im Intervall, das dem Bereich $[g((2n - {}^1/_2)\pi), g((2n + {}^1/_2)\pi)]$ entspricht, einwertig ist (aus denselben Gründen, die bei unverschwindendem, endlichem S_1/S_2 gelten); es gibt eine Eigenwellenzahl im Intervall $((2n-{}^1/_2)\pi, (2n+{}^1/_2)\pi)$. Falls $g((2n+{}^1/_2)\pi) = 0$, ist $(2n + {}^1/_2)\pi$ eine einzige, entartete Eigenwellenzahl im Intervall $[(2n-{}^1/_2)\pi, (2n+{}^3/_2)\pi]$, aus denselben Gründen, wie sie im letzten Absatz aufgeklärt werden. Diese weisen die Beziehung

$$(2n - {}^1/_2)\pi \le 2n\text{-tes } kL|_e \le (2n + {}^1/_2)\pi$$

analytisch nach. Der Nachweis für

$$\big((2n - 1) - {}^1/_2\big)\pi \le (2n-1)\text{-tes } kL|_e \le \big((2n - 1) + {}^1/_2\big)\pi$$

kann analog geführt werden.

4.2. Wert der Eigenwellenzahl

Bei $S_1/S_2 = 0$ kann man die Eigenwellenzahlen aufgrund der Gleichung $g(kL) = 0$ analytisch rechnen. Diese Gleichung führt zu

$$\cos\big(kL(L_1/L)\big)\sin\big(kL(1 - L_1/L)\big) = 0,$$

was sich erfüllt, wenn

$$\cos(kL(L_1/L)) = 0 \quad \text{oder} \quad \sin(kL(1 - L_1/L)) = 0.$$

Aus $\cos(kL(L_1/L)) = 0$ folgt

$$kL|_e = \frac{(i - {}^1/_2)\pi}{L_1/L}. \tag{35}$$

Aus $\sin(kL(1 - L_1/L)) = 0$ folgt

$$kL|_e = \frac{j\pi}{1 - L_1/L}. \tag{36}$$

Es ist für jetzt unbekannt, welche von den beiden möglichen Gleichungen, (35) oder (36), zu wählen ist, und auf wie vielen Wert die ganze Zahl i oder j festzusetzen ist. Das kann aufgrund der grundsätzlichen Beziehung (32) gelöst werden.

Zuerst schreibt man Gleichung (36) zwecks systematischer Festsetzung der ganzen Zahl wie

$$kL|_e = \frac{(m - i)\pi}{1 - L_1/L}, \quad (i = 0, 1, \ldots, m - 1) \tag{37}$$

(m ist die Ordnungszahl der Eigenwellenzahl) um. Die Beziehung (32) lautet, wenn kL durch Gleichung (35) bestimmt wird,

$$m - \frac{1}{2} \le \frac{i - {}^1/_2}{L_1/L} \le m + \frac{1}{2}.$$

Das führt zu

$$\Big(m - \frac{1}{2}\Big)\frac{L_1}{L} + \frac{1}{2} \le i \le \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\frac{L_1}{L} + \frac{1}{2}. \tag{38}$$

Die Beziehung (32) lautet, wenn kL durch Gleichung (37) bestimmt wird,

$$m - \frac{1}{2} \le \frac{m - i}{1 - L_1/L} \le m + \frac{1}{2}.$$

Das führt zu

$$\Big(m + \frac{1}{2}\Big)\frac{L_1}{L} - \frac{1}{2} \le i \le \Big(m - \frac{1}{2}\Big)\frac{L_1}{L} + \frac{1}{2}. \tag{39}$$

Für ein gegebenes L_1/L mit einem vorgeschriebenen Parameter m gibt es ein einziges i, das entweder die Beziehung (38) oder (39) erfüllt. Wenn ein i die Beziehung (38) erfüllt, wird $kL|_e$ durch Gleichung (35) mit diesem i gerechnet; wenn (39), durch (37).

Ein die Beziehung (38) oder (39) erfüllendes i kann mit Hilfe von einem Diagramm gefunden werden (Abbildung 8). Man kann die Eigenwellenzahl für ein gegebenes $L_1/L = l$ bei $S_2/S_1 = 0$ als die Eigenwellenzahl für $L_1/L = 1 - l$ bei $S_1/S_2 = 0$ erhalten.

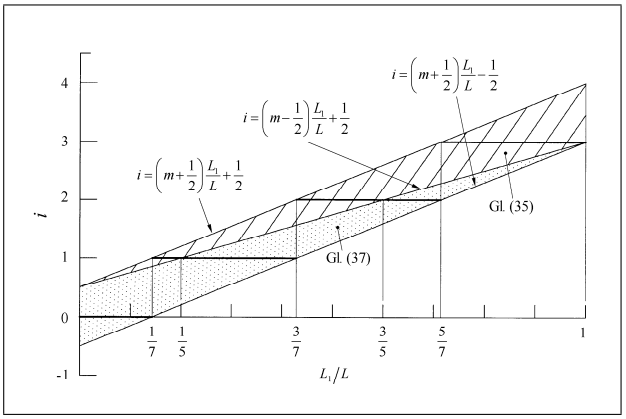

Abbildung 8. Diagramm zum Finden der ganzen Zahl i in Gleichungen (35) oder (37); hier ist m drei. Gebrauchsbeispiel: wenn $L_1/L = 0.3$, wird die Eigenwellenzahl durch Gleichung (37) mit $i = 1$ und $m = 3$ gerechnet.

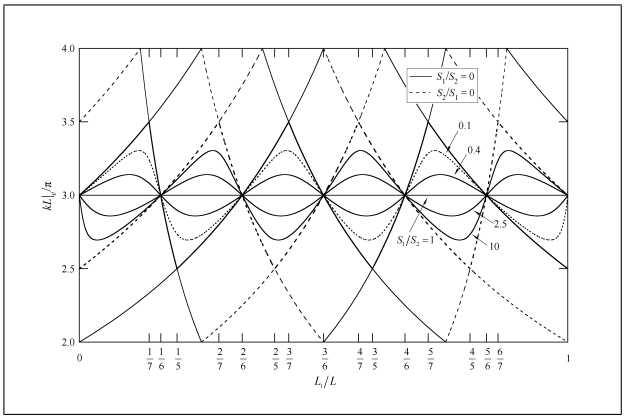

Abbildung 9. Eigenwellenzahlen abhängig von L_1/L für die Wellen der dritten Mode. Die Kurven im $kL|_e/\pi$ Bereich [2.0,2.5] stellen die Eigenwellenzahlen für die Wellen der zweiten Mode dar; die Kurven im $kL|_e/\pi$ Bereich [3.5,4.0] die Eigenwellenzahlen für die Wellen der vierten Mode.

5. Wellenfeld

5.1. Allgemeine Beschaffenheit

Ein Wellenfeld wird durch die Eigenwellenzahl eindeutig festgelegt, die Größe einer Amplitude ausgenommen. Das Verhältnis der Amplituden wird durch Gleichung (7) oder (8) festgelegt, aber eine der Amplituden bleibt bis zum Ende beliebig. Indem wir die Wellen der dritten Mode als Beispiel aufnehmen, rechnen wir die Eigenwellenzahlen (Abbildung 9) und untersuchen die Wellenfelder.

An der Querschnittssprungstelle (im Folgenden: Trennstelle) ist der dimensionslose Schalldruck (im Folgenden: Schalldruck) stetig, aber die dimensionslose Schallschnelle (im Folgenden: Schallschnelle) unstetig (Abbildung 10); die rechtsseitige Schallschnelle ist das S_1/S_2-fache der linksseitigen. Das ist eine natürliche Folge der Randbedingungen (1) und (2). Gleichungen (3)–(6) besagen, dass der Ortsverlauf des Schalldrucks demjenigen der Schallschnelle-Ortsableitung gleich und der Ortsverlauf der Schallschnelle demjenigen der Schalldruck-Ortsableitung gleich ist. Daraus erkennt man, dass die Ortsableitung der Schallschnelle an der Trennstelle stetig und diejenige des Schalldrucks dort unstetig ist (ihr rechtsseitiger Wert ist das S_1/S_2-fache ihres linksseitigen). Denk an das Kompressions- und Trägheitsgesetz [2]. Das Verhältnis P_1/P_2 hängt von L_1/L und S_1/S_2 ab. Je größer das Verhältnis S_1/S_2 für ein gegebenes L_1/L ($L_1/L =$ 2/6 oder 4/6 ausgenommen, siehe den nächsten Absatz) ist, desto niedriger ist das Verhältnis $|P_1|/|P_2|$ ($|P_1|/|P_2| >$ 1 bei $S_1/S_2 < 1$ und $|P_1|/|P_2| < 1$ bei $S_1/S_2 > 1$). Wie die Welle in einem Rohr ohne Querschnittssprung hat die Druckwelle drei Knoten und die Schnellenwelle zwei Knoten.

Falls L_1/L bei 2/6, 4/6 [für die Welle der m-ten Mode, bei $2n/2m$, $n = 1, 2, \ldots, m-1$] oder bei 1/6, 3/6, 5/6 [$(2n-1)/2m$, $n = 1, 2, \ldots, m$] liegt, beträgt die Eigenwellenzahl 3π [$m\pi$]; in diesen Fällen weisen die Wellenfelder Besonderheiten auf. Bei den Rohrformen zur ersten Gruppe befinden sich sowohl ein Knoten der Schnellenwelle im Teil 1 als auch ein im Teil 2 an der Trennstelle. Dort ist die Schallschnelle null und wird das Wellenfeld deswegen vom Querschnittssprung nicht beeinflusst. Das Wellenfeld ist ganz identisch mit demjenigen in einem Rohr ohne Querschnittssprung [$P_1/P_2 = (-1)^m$ bei allen S_1/S_2]. Bei den Rohrformen zur letzten Gruppe befinden sich sowohl ein Knoten der Druckwelle im Teil 1 als auch ein im Teil 2 an der Trennstelle. Obwohl die Eigenwellenzahl bei allen S_1/S_2 einen einzigen Wert beträgt, ändert sich das Verhältnis P_1/P_2 mit S_1/S_2. Das Verhältnis $|P_1|/|P_2|$ ist maximal (bei $S_1/S_2 < 1$) oder minimal ($S_1/S_2 > 1$) und dem Verhältnis S_2/S_1 gleich. Bei $S_1/S_2 = 0$, insbesondere, ist P_2 null.

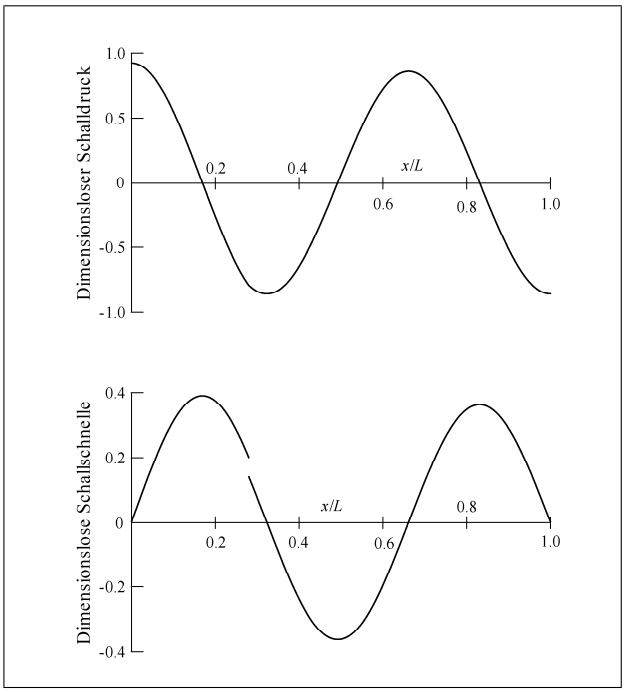

Abbildung 10. Ortsverlauf des dimensionslosen Schalldrucks und der dimensionslosen Schallschnelle: $P_1 = 1$, $S_1/S_2 = 0.7$, $L_1/L = 0.28$, $kL/\pi = 2.9544$, $\omega t = 0.4$.

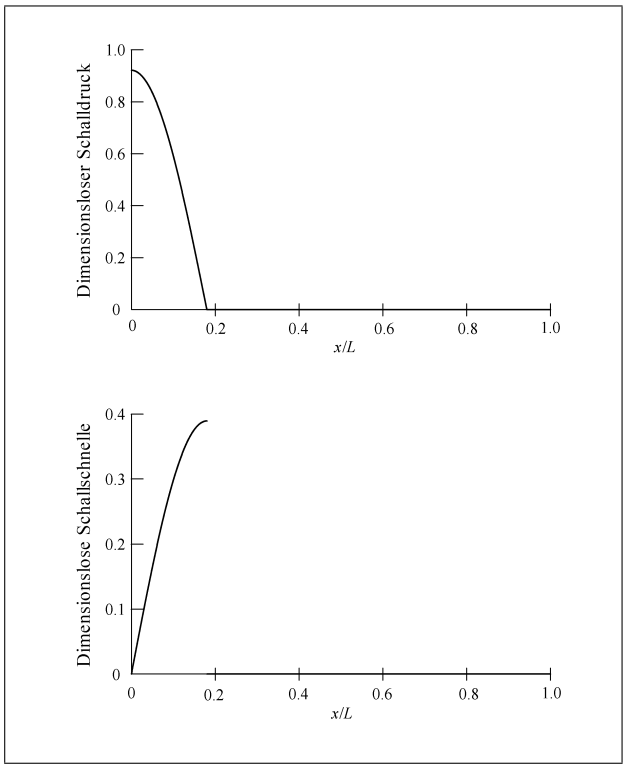

Abbildung 11. Ortsverlauf des dimensionslosen Schalldrucks und der dimensionslosen Schallschnelle: $P_1 = 1$, $S_1/S_2 = 0$, $L_1/L = 0.18$, $kL/\pi = 2.7778$, $\omega t = 0.4$.

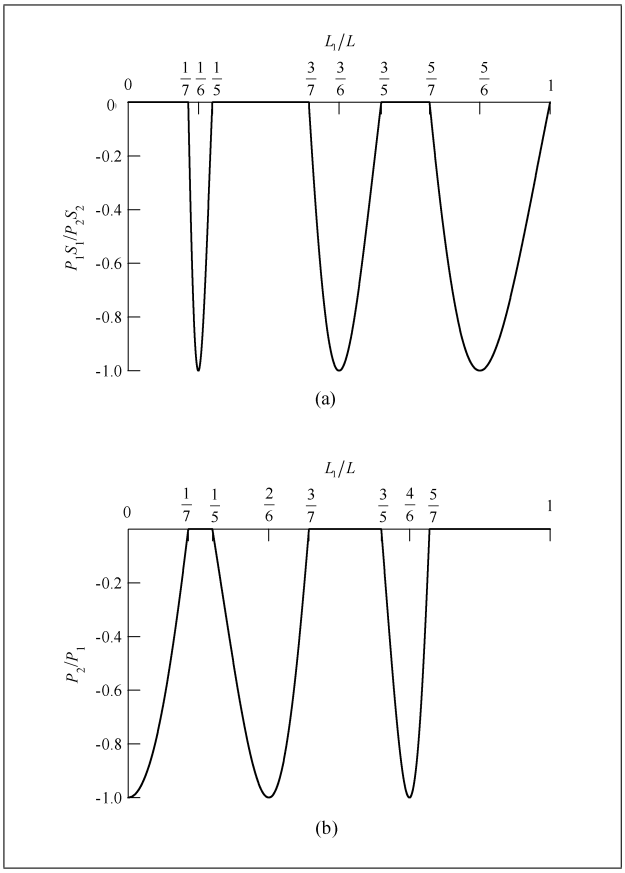

Abbildung 12. Änderung des P_1S_1/P_2S_2 und P_2/P_1 bei verschwindendem S_1/S_2.

5.2. Eigentümlichkeiten bei verschwindendem S_1/S_2

5.2.1. Im Fall $kL|_e \neq m\pi$ und $kL|_e \neq (m \pm 1/2)\pi$

Wenn die Eigenwellenzahl den durch Gleichung (35) gegebenen Wert annimmt (die rechts absteigenden Zweige in Abbildung 9, siehe auch Tabelle II), ist P_1/P_2 null (Abbildung 11). Ein Knoten der Druckwelle im Teil 1 befindet sich an der Trennstelle. Die den Ortsverlauf des Schalldrucks bestimmende Kosinusfunktion nimmt dort im Teil 2 nicht null an, aber das verschwindende P_2 lässt die Gleichheit der Schalldrücke an der Trennstelle zustande kommen. Wegen unendlich großen $|P_1|/|P_2|$ bleibt P_1S_1/P_2S_2 trotz $S_1/S_2 = 0$ unverschwindend und ändert sich nach $\cos(kL|_e)$ (Abbildung 12a).

Wenn die Eigenwellenzahl den durch Gleichung (37) gegebenen Wert annimmt (die rechts aufsteigenden Zweige in Abbildung 9, siehe auch Tabelle II), ist P_1S_1/P_2S_2 null. Ein Knoten der Schnellenwelle im Teil 2 befindet sich an der Trennstelle (Abbildung 13). Die den Ortsverlauf der Schallschnelle bestimmende Sinusfunktion nimmt dort im Teil 1 nicht null an, aber das verschwindende S_1 lässt die Gleichheit der Schallflüsse an der Trennstelle zustande kommen. Das P_2/P_1 ändert sich nach $\cos(kL|_e)$ (Abbildung 12b).

5.2.2. Im Fall $kL|_e = (m \pm 1/2)\pi$

Ein Zweig zu Gleichung (35) und ein zu Gleichung (37) treffen sich bei L_1/L von 1/7, 3/7 und 5/7 [für die Welle der m-ten Mode, bei L_1/L von $n/(2m+1)$, $n = 1, 3, \ldots, 2m-1$]; sie treffen sich auch bei L_1/L von 1/5 und 3/5 [L_1/L von $n/(2m-1)$, $n = 1, 3, \ldots, 2m-3$]. In solchen Fällen verwirklicht sich ein eigenartiger Verlauf, wobei an derselben Stelle (Trennstelle) sich ein Knoten der Druckwelle (im Teil 1) und ein der Schnellenwelle (im Teil 2) befinden. In den Fällen zur ersten Gruppe beträgt die Eigenwellenzahl ihren maximalen Wert 3.5π [$(m+1/2)\pi$], der mit der minimalen Eigenwellenzahl für die Welle der vierten [$(m+1)$-ten] Mode übereinstimmt. In den Fällen zur letzten Gruppe beträgt die Eigenwellenzahl ihren minimalen Wert 2.5π [$(m-1/2)\pi$], der mit der maximalen Eigenwellenzahl für die Welle der zweiten [$(m-1)$-ten] Mode übereinstimmt. Die Eigenwellenzahlen sind in diesen Fällen entartet.

Wenn die Eigenwellenzahl 3.5π ist, stehen im Rohr maximale, 3.5 Halbdruckwellen der dritten Mode und minimale, 3.5 Halbdruckwellen der vierten Mode. In solchen Fällen verhält sich die Welle, wie sie in Abbildung 14 dargestellt ist. Das ist der Grenzübergang des in Abbildung 15 (dritte Mode) und in Abbildung 16

Tabelle II. Verhältnisse P_1/P_2 und P_1S_1/P_2S_2 bei verschwindendem S_1/S_2.

$kL\|_e$	$(i-1/2)\pi/(L_1/L)$	$(m-i)\pi/(1-L_1/L)$
P_1/P_2	$(-1)^{i-1}\sin kL\|_e/0$	$1/\cos kL\|_e$
P_1S_1/P_2S_2	$\cos kL\|_e$	$0/(-1)^{m-i-1}\sin kL\|_e$

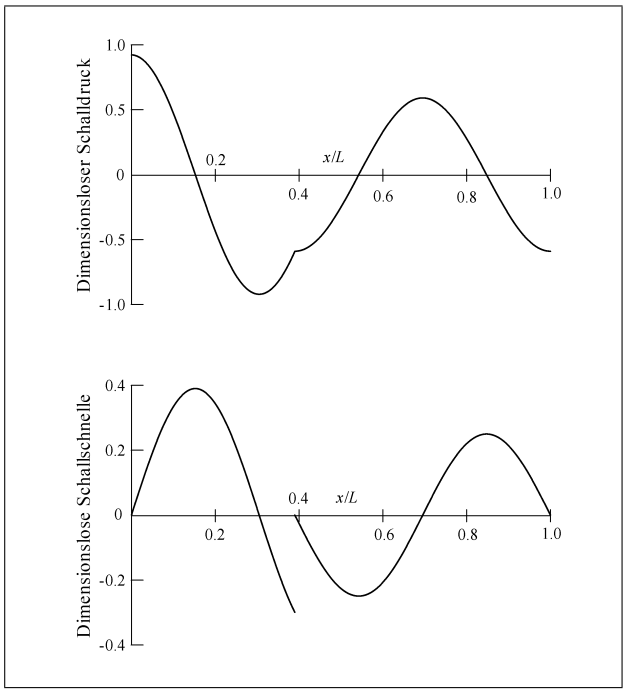

Abbildung 13. Ortsverlauf des dimensionslosen Schalldrucks und der dimensionslosen Schallschnelle: $P_1 = 1$, $S_1/S_2 = 0$, $L_1/L = 0.39$, $kL/\pi = 3.2787$, $\omega t = 0.4$.

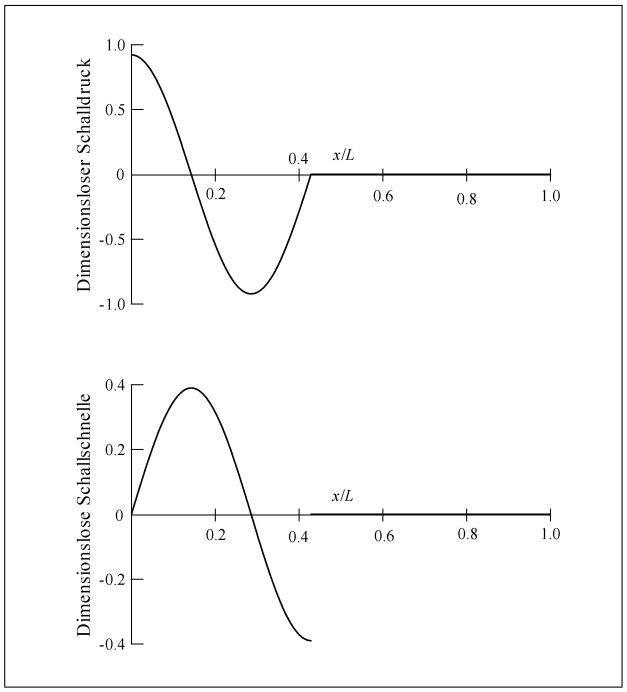

Abbildung 14. Ortsverlauf des dimensionslosen Schalldrucks und der dimensionslosen Schallschnelle: $P_1 = 1$, $S_1/S_2 = 0$, $L_1/L = 0.4286$ (=3/7), $kL/\pi = 3.5$, $\omega t = 0.4$.

(vierte Mode) dargestellten Verhaltens. Ebenfalls, wenn die Eigenwellenzahl 2.5π ist, stehen im Rohr 2.5 Halbdruckwellen; das ist minimal für die Welle der dritten Mode und maximal für die Welle der zweiten Mode.

Bisher ist angenommen worden, dass $L_1/L \neq 0$ und $L_1/L \neq 1$. Die Rohrform zu $L_1/L = 0$ oder 1 ist bei

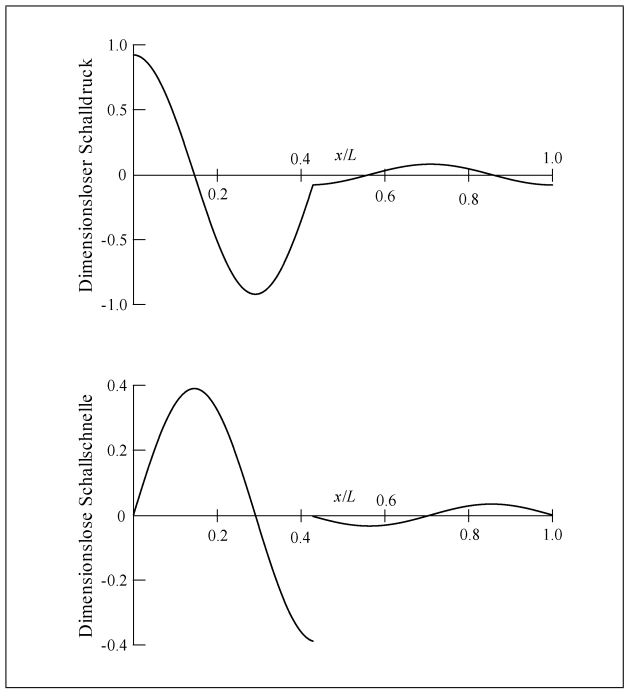

Abbildung 15. Ortsverlauf des dimensionslosen Schalldrucks und der dimensionslosen Schallschnelle: $P_1 = 1$, $S_1/S_2 = 0.01$, $L_1/L = 0.4286$ (=3/7), $kL/\pi = 3.4359$, $\omega t = 0.4$. An der Querschnittssprungstelle steht das Kurvenende der Schallschnelle im Teil 2 unterhalb der horizontalen Achse, obgleich es in diesem Diagramm sie zu erreichen scheit.

unverschwindendem, endlichem S_1/S_2 zulässig, obwohl das Wellenfeld dabei trivial ist. Doch ist die Rohrform zu $L_1/L = 0$ bei $S_2/S_1 = 0$ verboten, weil dabei die Schallschnelle am linken Ende nicht null wird; die Rohrform zu $L_1/L = 1$ bei $S_1/S_2 = 0$ ist verboten, weil dabei die Schallschnelle am rechten Ende nicht null wird.

6. Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

Im von diesem Autor durchgeführten Experiment der befestigt betriebenen Festtreibstoffrakete (I-Brenner), wurden die akustischen Felder, wie sie oben studiert wurden, approximativ verwircklicht [4]. In dieser Rakete hatte der Treibstoffblock eine rohrförmige Bohrung und füllte nicht die ganze Länge der Brennkammer aus. Deswegen machte die Bohrung des Treibstoffblocks und der Teil der Brennkammer, in dem sich kein Treibstoffblock befand, zusammen ein Rohr aus, in dem es eine plötzliche Änderung des Querschnitts gab; das Düsenende der Brennkammer konnte wegen der Kleinheit der Düsenhalsöffnung für nahezu akustisch geschlossen gehalten werden.

In diesem Experiment entstanden starke, stehende, akustische Wellen in der Brennkammer. Die gemessenen Frequenzen und die Verhältnisse von der Druckamplitude am vorderen Ende zu derjenigen am hinteren Ende wurden mit den aufgrund der vorliegenden Analyse berechneten Frequenzen und Druckamplitudenverhältnissen ver-

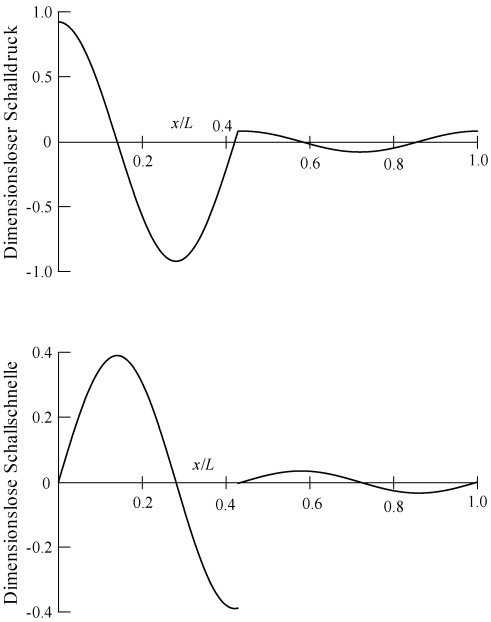

Abbildung 16. Ortsverlauf des dimensionslosen Schalldrucks und der dimensionslosen Schallschnelle: $P_1 = 1$, $S_1/S_2 = 0.01$, $L_1/L = 0.4286$ (=3/7), $kL/\pi = 3.5641$, $\omega t = 0.4$. An der Querschnittssprungstelle steht das Kurvenende der Schallschnelle im Teil 2 unterhalb der horizontalen Achse.

glichen. Die vorliegende Analyse setzt eine zeitlich unveränderliche Rohrform voraus. Andererseits ändert sich zeitlich die Rohrform im Experiment wegen des Abbrandes des Treibstoffblocks. Jedoch ist die maßgebende Zeitdauer der Änderung der Rohrform (3 s bis 5 s) weit länger als diejenige der Druckschwingung (10^{-3} s). Deshalb können die experimentellen akustischen Felder essenziell für zeitlich unverändert gehalten werden und ist der Vergleich berechtigt. Die experimentellen und die gerechneten Ergebnissen stimmen bis zu einem gewissen Grad überein [4, Figur 8 und Figur 9, S. 111], was die Annehmbarkeit der hier geschafften Voraussetzungen zeigt.

7. Schlussfolgerungen

Bei allen S_1/S_2:

1. Das Schallfeld im Rohr mit $S_1/S_2 = s$ und $L_1/L = l$ ist mit demjenigen im Rohr mit $S_1/S_2 = 1/s$ und $L_1/L = 1 - l$ identisch.
2. An der Querschnittssprungstelle ist die Ortsableitung der Schallschnelle stetig, aber diejenige des Schalldrucks unstetig.
3. Falls L_1/L bei $2n/2m$ ($n = 1, 2, \ldots, m-1$) oder $(2n-1)/2m$ ($n = 1, 2, \ldots, m$) liegt, beträgt die dimensionslose charakteristische Wellenzahl (die Eigenwellenzahl, $kL|_e$) für alle S_1/S_2 den Wert $m\pi$. Bei den Rohrformen zur ersten Gruppe befinden sich sowohl ein Knoten der Schnellenwelle im Teil 1 als auch ein im Teil 2 an der Trennstelle und das Wellenfeld ist mit demjenigen im Rohr ohne Querschnittssprung identisch. Bei den Rohrformen zur letzteren Gruppe befinden sich sowohl ein Knoten der Druckwelle im Teil 1 als auch ein im Teil 2 an der Querschnittssprungstelle, und P_1/P_2 ändert sich mit S_1/S_2.

Bei unverschwindendem, endlichem S_1/S_2:

1. Die Eigenwellenzahl der m-ten Mode liegt im Intervall $((m - 1/2)\pi, (m + 1/2)\pi)$.

Bei verschwindendem S_1/S_2:

1. Die Eigenwellenzahl der m-ten Mode liegt im Intervall $[(m - 1/2)\pi, (m + 1/2)\pi]$; sie kann analytisch gerechnet werden.
2. Wenn $kL|_e \neq m\pi$ und $kL|_e \neq (m \pm 1/2)\pi$, befindet sich ein Knoten der Druckwelle im Teil 1 an der Querschnittssprungstelle oder befindet sich ein Knoten der Schnellenwelle im Teil 2 an der Querschnittssprungstelle.
3. Falls L_1/L bei $n/(2m+1)$ ($n = 1, 3, \ldots, 2m-1$) liegt, beträgt die Eigenwellenzahl der m-ten Mode $(m + 1/2)\pi$ und stimmt mit der Eigenwellenzahl der $(m+1)$-ten Mode überein. Falls L_1/L bei $n/(2m-1)$ ($n = 1, 3, \ldots, 2m-3$) liegt, beträgt die Eigenwellenzahl $(m - 1/2)\pi$ und stimmt mit der Eigenwellenzahl der $(m-1)$-ten Mode überein. In den beiden Fällen sind die Eigenwellenzahlen entartet.

Anhang

Die linearen akustischen Felder in demjenigen Rohr mit einem Querschnittsprung, bei dem ein Ende oder beide Enden offen sind, werden untersucht.

Das Schallfeld in einem beiderseits offenen Rohr

Die Randbedingung am offenen Ende eines Rohrs kann nicht so sicher festgesetzt werden, wie diejenige am geschlossenen Ende (verschwindende Schallschnelle).
Hier wird der mathematischen Einfachkeit halber verschwindender Schalldruck als die Randbedingung am offenen Ende angenommen. Diese Randbedingung ist nicht streng exakt, aber verschwindender Schalldruck am offenen Ende verwirklicht sich approximativ; die Anwendung dieser Randbedingung ist berechtigt [5]. Aufgrund der linearen Akustik beträgt die Eigenwellenzal der im geraden, beiderseits offenen Rohr stehenden Wellen $m\pi$.

Wegen der Randbedingungen $p_1 = 0$ bei $x = 0$ und $p_2 = 0$ bei $x = L$ ergeben sich die Verläufe des Schalldrucks und der Schallschnelle zu

$$\begin{aligned} p_1/\gamma\overline{P} &= P_1 \sin\big(kL(x/L)\big)\cos\omega t, \\ v_1/c &= -P_1 \cos\big(kL(x/L)\big)\sin\omega t, \\ p_2/\gamma\overline{P} &= P_2 \sin\big(kL(1-x/L)\big)\cos\omega t, \\ v_2/c &= P_2 \cos\big(kL(1-x/L)\big)\sin\omega t, \end{aligned}$$

und daraus folgt die Grundgleichung zur Bestimmung der Eigenwellenzahl wie

$$\cot\big(kL(L_1/L)\big) = -\frac{S_2}{S_1}\cot\big(kL(1-L_1/L)\big). \qquad \text{(A1)}$$

Man sieht ein, dass die Gleichung (A1) mit Gleichung (9) identisch ist, wenn S_1/S_2 in Gleichung (9) in S_2/S_1 umgetauscht wird. Das bedeutet, dass die Ergebnisse in Abschnitten 3 und 4 gelten für das Schallfeld im beiderseits offenen Rohr, wenn S_1/S_2 in Abschnitten 3 und 4 in S_2/S_1 umgetauscht wird. Man kann die Beziehung

$$(m - 1/2)\pi \le m\text{-tes } kL|_e \le (m + 1/2)\pi$$

beweisen. Abbildung 9 mit S_1/S_2 in S_2/S_1 (auch S_2/S_1 in S_1/S_2) umgetauscht zeigt die Änderungen des $kL|_e$ mit L_1/L für verschiedenes S_1/S_2. Allerdings unterscheiden sich die Ortsverläufe des Schalldrucks und der Schallschnelle von denjenigen im beiderseits geschlossenen Rohr. Doch gelten auch hier die Eigenschaften, dass die Ortsableitung der Schallschnelle an der Trennstelle stetig und diejenige des Schalldrucks dort unstetig ist (ihr rechtsseitiger Wert ist das S_1/S_2-fache ihres linksseitigen).

Das Schallfeld im Rohr mit einem geschlossenen und einem offenen Ende

Aufgrund der linearen Akustik beträgt die Eigenwellenzahl im geraden Rohr mit einem geschlossenen und einem offenen Ende stehenden Wellen $(m - 1/2)\pi$. Wegen der Randbedingungen $v_1 = 0$ bei $x = 0$ und $p_2 = 0$ bei $x = L$ ergeben sich

$$\begin{aligned} p_1/\gamma\overline{P} &= P_1 \cos\big(kL(x/L)\big)\cos\omega t, \\ v_1/c &= P_1 \sin\big(kL(x/L)\big)\sin\omega t, \\ p_2/\gamma\overline{P} &= P_2 \sin\big(kL(1-x/L)\big)\cos\omega t, \\ v_2/c &= P_2 \cos\big(kL(1-x/L)\big)\sin\omega t, \end{aligned}$$

und daraus folgt die Grundgleichung wie

$$\cot\big(kL(L_1/L)\big) = \frac{S_1}{S_2}\tan\big(kL(1-L_1/L)\big). \quad \text{(A2)}$$

Gleichung (A2) hat nicht so enge Ähnlichkeit mit Gleichung (9), wie Gleichung (A1) mit Gleichung (9) hat. Jedoch können die in Abschnitten 3 und 4 gebrauchten Analysenmethoden hier analog angewendet werden. Dadurch wird

$$(m-1)\pi \le m\text{-tes } kL|_e \le m\pi$$

nachgewiesen, wobei die Gleichheiten für $S_1/S_2 = 0$ oder $S_2/S_1 = 0$ gelten (die linke Gleichheit gilt nicht, wenn $m = 1$).

Wenn man Gleichung (A2) wie

$$S_1/S_2 = \cot\big(kL(L_1/L)\big)\cot\big(kL(1-L_1/L)\big)$$

umschreibt, sieht man, dass diese Gleichung unverändert bleibt, wenn L_1/L mit $1-L_1/L$ getauscht wird. Das zeigt, dass, für ein gegebenes S_1/S_2, die Eigenwellenzahl für $L_1/L = l$ mit der Eigenwellenzahl für $L_1/L = 1 - l$ identisch ist. Bei $L_1/L = (2n-1)/(2m-1)$ $(n = 1, \ldots, m-1)$ beträgt die Eigenwellenzahl $(m - 1/2)\pi$ unabhängig von S_1/S_2, aber P_1/P_2 hängt von S_1/S_2 ab. Bei $L_1/L = 2n/(2m-1)$ $(n = 1, \ldots, m-1)$ beträgt die Eigenwellenzahl $(m - 1/2)\pi$ unabhängig von S_1/S_2 und sind die Ortsverläufe des Schalldrucks und der Schallschnelle auch unabhängig von S_1/S_2 (gleich den Ortsverläufe im Rohr ohne Querschnittssprung). Die Eigenwellenzahl entartet für $S_1/S_2 = 0$ bei $L_1/L = (2n-1)/(2m-2)$ $(n = 1, \ldots, m-1)$, dabei $kL|_e = (m-1)\pi$ und bei $L_1/L = (2n+1)/2m$ $(n = 0, 1, \ldots, m-1)$, dabei $kL|_e = m\pi$, und für $S_2/S_1 = 0$ bei $L_1/L = n/(m-1)$ $(n = 1, \ldots, m-2)$, dabei $kL|_e = (m-1)\pi$ und bei $L_1/L = (n+1)/m$ $(n = 0, 1, \ldots, m-2)$, dabei $kL|_e = m\pi$. Abbildung A1 entspricht Abbildung 9 (Bei $S_2/S_1 = 0$ ist $L_1/L = 0$ oder 1 verboten).

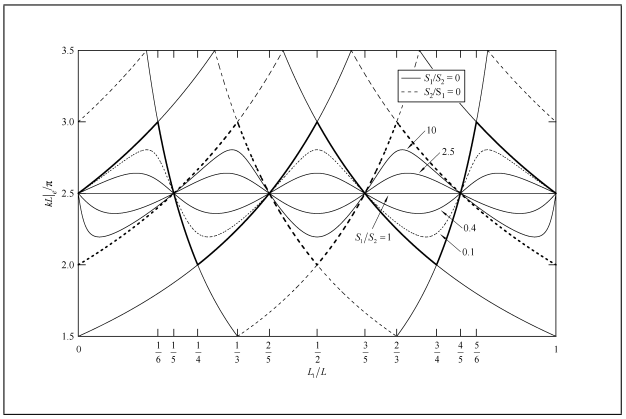

Abbildung A1. Eigenwellenzahlen der im Rohr mit einem geschlossenen und einem offenen Ende stehenden Wellen der dritten Mode. Die Kurven im $kL|_e/\pi$ Bereich [1.5,2.0] stellen die Eigenwellenzahlen für die Wellen der zweiten Mode dar; die Kurven im $kL|_e/\pi$ Bereich [3.0,3.5] die Eigenwellenzahlen für die Wellen der vierten Mode.

Im Teil 1 des Rohrs wird der Ortsverlauf des Schalldrucks durch eine Kosinusfunktion und derjenige der Schallschnelle durch eine Sinusfunktion ausgedrückt; im Teil 2 wird der Ortsverlauf des Schalldrucks durch eine Sinusfunktion und derjenige der Schallschnelle durch eine Kosinusfunktion ausgedrückt. In diesem Schallfeld gibt es deswegen diejenige Symmetrie des Feldes nicht, deren Charakter im Abschnitt 2 unter Gleichung (12) geschrieben wird. Jedoch gelten hier auch die Eigenschaften, dass die Ortsableitung der Schallschnelle an der Trennstelle stetig und diejenige des Schalldrucks dort unstetig ist (ihr rechtsseitiger Wert ist das S_1/S_2-fache ihres linksseitigen).

Literaturverzeichnis

[1] F. E. C. Culick, V. Yang: Prediction of the stability of unsteady motions in solid-propellant rocket motors. – In: Nonsteady Burning and Combustion Stability of Solid Propellants (Vol.143, Progress in Astronautics and Aeronautics). L. De Luca, E. W. Price, M. Summerfield (eds.). AIAA, Washington, 1992, 759–761.

[2] L. Cremer, M. Möser: Technische Akustik. 5. Aufl. Springer, Berlin, 2003. 207-209, 27.

[3] L. Cremer, M. Hubert: Vorlesungen über Technische Akustik. 4. Auflage Springer, Berlin, 1990. 145-148.

[4] K. Matsui: Acoustic pressure oscillations induced in I-burner. Trans. Jap. Soc. Aero. Space Sci. **51** (2008) 107–113.

[5] J. W. S. Rayleigh: The Theory of Sound. Dover Publication, New York, 1945. Vol. II, p. 51-52.